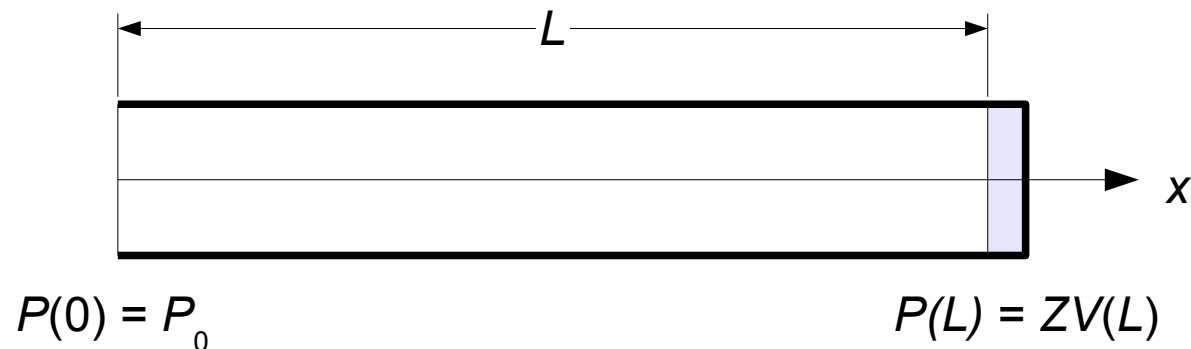


2. Das Kundtsche Rohr

- Mithilfe des Kundtschen Rohrs kann die spezifische akustische Impedanz von Oberflächen gemessen werden.
- Versuchsaufbau:



2. Das Kundtsche Rohr

- Am linken Ende eines Rohres mit schallharten Wänden wird über einen Lautsprecher die Schalldruckamplitude P_0 aufgebracht.
- Am rechten Ende befindet sich die Probe, deren Impedanz Z bestimmt werden soll.
- Der untersuchte Frequenzbereich liegt unterhalb der niedrigsten Grenzfrequenz, so dass sich das Schallfeld aus ebenen Wellen zusammensetzt.

2. Das Kundtsche Rohr

- Schalldruck:

- Das Schallfeld setzt sich aus zwei ebenen Wellen zusammen:

$$P(x) = P_R e^{-i k x} + P_L e^{i k x}$$

- Der erste Summand ist die nach rechts laufende auf die Probe auftreffende ebene Welle.
- Der zweite Summand ist die nach links laufende von der Probe reflektierte ebene Welle.
- Für die Schallschnelle gilt:

$$V(x) = -\frac{1}{i \omega \rho_0} \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(P_R e^{-i k x} - P_L e^{i k x} \right)$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Randbedingung am rechten Ende: $P(L) = Z V(L)$

$$P_R e^{-ikL} + P_L e^{ikL} = \frac{Z}{\rho_0 c} (P_R e^{-ikL} - P_L e^{ikL})$$

$$\rightarrow P_L e^{ikL} \left(\frac{Z}{\rho_0 c} + 1 \right) = P_R e^{-ikL} \left(\frac{Z}{\rho_0 c} - 1 \right)$$



$$\frac{P_L e^{ikL}}{P_R e^{-ikL}} = \frac{\frac{Z}{\rho_0 c} - 1}{\frac{Z}{\rho_0 c} + 1} = R$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Das Verhältnis R aus der Amplitude des reflektierten Schalldrucks zur Amplitude des einfallenden Schalldrucks am Ort L der Probe wird als Reflexionsfaktor bezeichnet.
- Der Reflexionsfaktor ist eine komplexe Größe: $R = r e^{i\phi}$
- Randbedingung am linken Ende: $P(0) = P_0$

$$P_0 = P_R + P_L, \quad P_L = R P_R e^{-2ikL}$$

$$\rightarrow P_0 = P_R (1 + R e^{-2ikL})$$

$$\rightarrow P_R = \frac{P_0}{1 + R e^{-2ikL}}, \quad P_L = \frac{P_0 R e^{-2ikL}}{1 + R e^{-2ikL}} = P_R R e^{-2ikL}$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Damit gilt für das Schallfeld:

$$P(x) = P_R \left(e^{-ikx} + r e^{-i(2kL - \phi)} e^{ikx} \right)$$

- Ermittlung des Reflexionsfaktors:
 - Amplitude r und Phase φ des Reflexionsfaktors können aus dem quadratischen Mittelwert des Schalldrucks ermittelt werden.

2. Das Kundtsche Rohr

- Der quadratische Mittelwert des Schalldrucks berechnet sich zu

$$\begin{aligned} 2\langle p^2 \rangle &= |P(x)|^2 \\ &= |P_R|^2 \left(e^{-ikx} + r e^{-i(2kL-\phi)} e^{ikx} \right) \left(e^{ikx} + r e^{i(2kL-\phi)} e^{-ikx} \right) \\ &= |P_R|^2 \left(1 + r^2 + r e^{i(2kL-2kx-\phi)} + r e^{-i(2kL-2kx-\phi)} \right) \\ &= |P_R|^2 \left(1 + r^2 + 2r \cos(2kL - 2kx - \phi) \right) \end{aligned}$$

- Die Maximalwerte sind $2\langle p^2 \rangle_{\max} = |P_R|^2 (1 + r^2 + 2r) = |P_R|^2 (1 + r)^2$
- Die Minimalwerte sind $2\langle p^2 \rangle_{\min} = |P_R|^2 (1 + r^2 - 2r) = |P_R|^2 (1 - r)^2$

2. Das Kundtsche Rohr

- Damit gilt für das Verhältnis der Effektivwerte:

$$\mu = \frac{\tilde{p}_{min}}{\tilde{p}_{max}} = \frac{1-r}{1+r}$$

- Auflösen nach r ergibt: $r = \frac{1-\mu}{1+\mu}$
- Der Phasenwinkel φ kann aus der Lage x_{min} des ersten Minimums bestimmt werden:

$$\pi = 2k(L - x_{min}) - \phi \rightarrow \phi = 2k(L - x_{min}) - \pi = \pi \left(\frac{L - x_{min}}{\lambda/4} - 1 \right)$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Ermittlung der Impedanz:

- Aus $\frac{Z - \rho_0 c}{Z + \rho_0 c} = R$ folgt:

$$\frac{Z}{\rho_0 c} = \frac{1 + R}{1 - R}$$

- Spezialfälle:

- Offenes Ende: $R = -1 \rightarrow Z = 0 \rightarrow P = ZV = 0$
 - Vollständige Absorption: $R = 0 \rightarrow Z = \rho_0 c$
 - Schallhartes Ende: $R \rightarrow 1 \rightarrow Z \rightarrow \infty \rightarrow V = P/Z \rightarrow 0$

2. Das Kundtsche Rohr

- Absorptionsgrad:

- Der Absorptionsgrad α ist definiert als das Verhältnis der während einer Periode absorbierten Energie W_A zur Energie W_R der auftreffenden Welle:

$$\alpha = \frac{W_A}{W_R}$$

- Die absorbierte Energie ist gleich der Differenz zwischen der Energie W_R der auftreffenden Welle und der Energie W_L der reflektierten Welle:

$$W_A = W_R - W_L$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Die Energien berechnen sich als Produkt der Intensitäten mit der Querschnittsfläche S und der Periodendauer T :

$$W = \langle I \rangle_T S T$$

- Mit $\langle I_R \rangle_T = \frac{|P_R|^2}{2 \rho_0 c}$, $\langle I_L \rangle_T = \frac{|P_L|^2}{2 \rho_0 c}$ folgt:

$$\alpha = 1 - \frac{\langle I_L \rangle_T}{\langle I_R \rangle_T} = 1 - \frac{|P_L|^2}{|P_R|^2} = 1 - |R|^2 \rightarrow \boxed{\alpha = 1 - r^2}$$

2. Das Kundtsche Rohr

- Der Absorptionsgrad hat ein Maximum für $r = 0$, d.h. für $Z = \rho_0 c$.
- Der Absorptionsgrad ist null für $R = 1$ (Reflexion am schallharten Ende) und für $R = -1$ (Reflexion am offenen Ende).
- Ist von einer absorbierenden Oberfläche nur der Absorptionsgrad bekannt, so kann die Impedanz mit dem positiven Reflexionsfaktor

$$R = \sqrt{1 - \alpha}$$

abgeschätzt werden.

- Je näher der Reflexionsfaktor bei 1 liegt, desto größer wird die Impedanz.